

一种利用顶点位形描述的 任意正交折线线圈阻抗解析建模新方法

吴德会,何天府,王晓红,黄一民

(厦门大学机电工程系,福建厦门361005)

摘 要: 本文利用顶点位形描述方法,建立了任意正交折线线圈阻抗的封闭模型. 首先,利用二阶矢量位公式对一个线形矩形线圈的电磁场分布进行描述,并推导了该矩形线圈的标量势表达式,其包含有一个利用矩形四个顶点的位置因子和角形因子进行描述的积分项;其次,证明了角形因子的两个重要性质,并利用该性质将矩形线圈的标量势表达式推广到任意正交折线线圈的情况;最后,建立了任意正交折线线圈阻抗的解析表达式,并以矩形螺线线圈为例进行了阻抗计算,并将计算结果与实验测量值进行了对比. 结果表明,计算值与测量值之间有良好的吻合度. 相对于现有的矩形描述法,本文所提方法在简化建模过程及提高建模速度方面具有明显优势.

关键词: 阻抗模型, 涡流检测, 正交折线线圈, 二阶矢量位, 顶点位形描述

中图分类号: TM153 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)09-2094-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.09.008

Analytical Impedance Model for an Arbitrary Orthogonal Polyline Coil Using Vertex Position-shape Description

WU De-hui, HE Tian-fu, WANG Xiao-hong, HUANG Yi-ming

(Department of Mechanical and Electrical Engineering, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: In this paper, the closed-form impedance model is provided for an arbitrary orthogonal polyline coil using vertex position-shape description. Firstly, the second order vector potential (SOVP) formula is used for the description of the electromagnetic fields produced by a filamentary rectangular coil. And the scalar potential of the rectangular coil is derived with an integral item described by the position factors and shape factors of the four vertexes of the rectangle. Secondly, two important properties of the shape factors are deduced, with which the analytical expressions of scalar potential can be generalized to the case of arbitrary orthogonal polyline coils. The analytical impedance expressions of arbitrary orthogonal polyline coils are finally derived and applied to a rectangular spiral coil. The theoretical results are compared with the experimental measurements. The comparison results show that the calculated and measured values are in good agreement. The proposed method greatly simplifies the modeling process compared with existing rectangle description method.

Key words: impedance model; eddy-current testing; orthogonal polyline coil; second order vector potential; vertex position-shape description

1 引言

折线线圈作为电磁换能器的重要组成部分,在涡流检测(Eddy-Current Testing, ECT)^[1]、电磁超声(ElectroMagnetic Acoustic Transducer, EMAT)^[2,3]等领域有着十分广泛的应用.

折线线圈电磁场及阻抗分析主要有数值法和解析

法两种. 数值法优点是具有较强的通用性,但其计算复杂度较大,线圈变换参数之后而要重新建模计算. 特别是该方法所建模型的物理意义不清晰,在一定程度上限制了该方法的应用^[4,5]. 因此,通过电磁场理论,对线圈的电磁特性进行物理意义清晰的解析法建模和分析,一直以来受到重视^[6,7].

国内外对线圈阻抗的研究多以轴对称线圈为

主^[8]. 近年来,针对一些特殊形状的折线线圈阻抗研究也有所开展^[9,10]. Theodoulidis T. P. 和 Kriezis E. E. 在平行置于非磁性导体空间上方的矩形线圈中心建立坐标系,提出了矩形描述法并利用二阶矢量位推导了该描述方法下的入射场和散射场阻抗^[11]. Fava J. O. 和 Ruch M. C. 在此基础上,利用矩形描述法又进一步扩展出直角螺旋形折线线圈的阻抗模型^[12]. Cheng Y. H. 和 Shu Y. M. 将直角螺旋形折线线圈简化为一系列同轴的矩形线圈,通过矩形线圈之间的串联叠加实现对该类线圈的互感计算^[13]. 国内学者郝宽胜、黄松岭、赵伟等通过坐标变换,将回折形折线线圈拆解为多个矩形线圈的串联叠加,得到了线圈阻抗的频域解析表达式^[14].

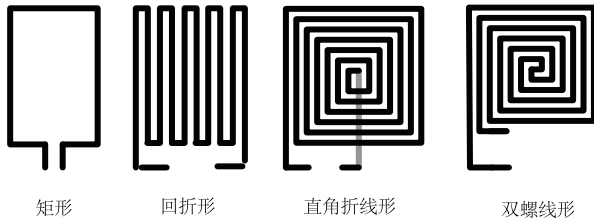


图1 常见正交折线线圈的外形结构示意图

如图1中所示的矩形、回折形、直角螺旋形和双螺旋线形线圈,均属于特殊形态的正交折线线圈. 对于这类线圈,现有方法的思路是先将其拆解为多个单矩形子线圈,再通过坐标平移来计算各子线圈之间的自阻抗和互阻抗,最后通过各子线圈串联来实现复杂线圈总阻抗的等效计算^[13,14]. 而对于形状无约束的任意正交折线线圈,因其结构复杂,拆解难度较大,针对该类线圈阻抗的模型研究尚比较鲜见.

针对这个问题,本文首次提出了一种利用顶点位形对正交折线线圈进行建模的新方法. 相对于现有方法,所提方法的特色在于:①新模型可以对矩形、回折形、直角螺旋形等多种不同的折线线圈进行描述,实现了上述线圈模型在表达形式上的统一. ②克服了现有方法需要将线圈结构进行拆解等效的问题,可通过复杂线圈顶角的位形信息,直接得到阻抗计算的解析表达式. ③避免了现有方法中必须通过坐标平移,将坐标原点置于子线圈中心的约束,从而简化了建模过程并提高建模速度.

2 线圈阻抗模型及二阶矢量位求解

2.1 问题的描述

待研究问题如图2中所示,将一忽略导线截面的线形线圈,以高度 z_s 平行置于电导率为 σ 、磁导率为 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 的无限大导体区域II上方. 真空区域I与导体区域II的分界面为 $z = 0$ ^[10]. 线形线圈在区域I内产生交变

电磁场,称为入射场;由区域II内的涡流在区域I内形成的电磁场,称为散射场.

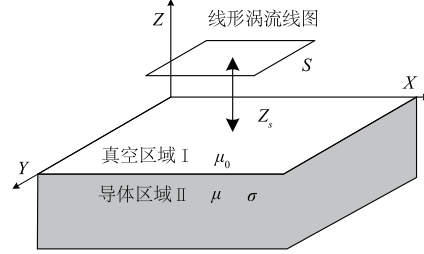


图2 置于导体平面上方线圈示意图

磁感应强度 \mathbf{B} 由磁矢势 \mathbf{A} 的旋度来表示 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$,并引入库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. 由于电磁换能器应用中的频率一般小于10MHz,可忽略位移电流和速度效应,磁矢势 \mathbf{A} 可引入二阶矢量位求解:

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W} = \nabla \times (z\mathbf{W}_a + \mathbf{z} \times \nabla W_b) \quad (1)$$

式中: W_a 和 W_b 为相互独立的标量函数; \mathbf{z} 为 z 轴方向上的单位向量.

则图2所示的线形涡流线圈的磁场可通过标势 W 进行求解,即:

$$\mathbf{B} = \nabla(\partial W / \partial z) \quad (2)$$

令该线形线圈上载有强度为 I_ε 的激励电流并形成了 I_ε 回路,则区域I中任一点(场点)的入射场磁感应强度表达为:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_\varepsilon}{4\pi} \nabla \times \oint_{l_\varepsilon} \frac{d\mathbf{l}_\varepsilon}{R} \quad (3)$$

式中, $R = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}$ 为待研究场点 (x, y, z) 与源点之间的距离.

利用斯托克斯公式将式(3)的线积分转换为面积分,可得:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_\varepsilon}{4\pi} \iint_S \nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \right) dx_s dy_s \quad (4)$$

式中, S 为线形线圈所包围的面积.

再比较式(2)和式(4),可得到入射场标势为:

$$W_\varepsilon = \frac{\mu_0 I_\varepsilon}{4\pi} \iint_S \frac{1}{R} dx_s dy_s \quad (5)$$

式中,下标 ε 代表该物理量属于线形线圈.

文献[11]中已给出了 W_ε 的二重广义积分形式:

$$W_\varepsilon = \frac{\mu_0 I_\varepsilon}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k|z-z_s|}}{k} e^{j(ax+by)} \cdot \iint_S e^{-j(ax+by_s)} dx_s dy_s dadb \quad (6)$$

以及线形线圈的散射场标势为:

$$W'_\varepsilon = \frac{\mu_0 I_\varepsilon}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} \frac{e^{-k(z+z_s)}}{k} \cdot e^{j(ax+by)} \iint_S e^{-j(ax+by_s)} dx_s dy_s dadb \quad (7)$$

2.2 矩形描述法

Theodoulidis T. P. 和 Kriezis E. E. 在矩形线圈的中心建立坐标系,提出了矩形描述法.下面,我们对利用矩形描述法的原理进行简单介绍.

如图3所示,将坐标系原点置于矩形线圈中心的正下方,并记矩形线圈导线中心的长为 $2y_d$ 、宽为 $2x_d$,线圈圈宽为 w 、厚度为 δ .则该线形矩形线圈所包围的面积 S 可以由下面式子表达:

$$S = \begin{cases} -x_d \leq x_s \leq x_d \\ -y_d \leq y_s \leq y_d \end{cases} \quad (8)$$

则可将式(6)和式(7)中对面积 S 的相关积分项提取,并根据线形矩形线圈参数进行积分可得:

$$\begin{aligned} \iint_S e^{-j(ax_s+by_s)} dx_s dy_s &= \int_{-y_d}^{y_d} e^{-jby_s} \int_{-x_d}^{x_d} e^{-jax_s} dx_s dy_s \\ &= \frac{4}{ab} \sin ax_d \sin by_d \end{aligned} \quad (9)$$

再对上式进行线宽 w 的积分运算,可得:

$$\begin{aligned} P &= \iint_w \iint_S e^{-j(ax_s+by_s)} dx_s dy_s dw_s \\ &= \frac{4}{ab} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sin a(x_d+w_s) \sin b(y_d+w_s) dw_s \\ &= \begin{cases} \frac{2\sin[(a-b)w+ax_d-by_d] - 2\sin(ax_d-by_d)}{(a-b)ab} \\ - \frac{2\sin[(a+b)w+ax_d+by_d]}{(a+b)ab} \\ + \frac{2\sin(ax_d+by_d)}{(a+b)ab}, & a \neq b \\ \frac{2w\cos[a(x_d-y_d)]}{ab} \\ - \frac{\sin[a(2w+x_d+y_d)]}{a^2b} \\ + \frac{\sin[a(x_d+y_d)]}{a^2b}, & a = b \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

该矩形线圈的宏观标势 W_{total} 可对对截面 S' 内所有线形线圈积分得到:

$$W_{\text{total}} = \int_{S'} W_e dS' = \int_{\delta} \int_w W_e dw_s dz_s \quad (11)$$

将式(6)和式(7)代入式(11)中,并通过式(10)进行整理,计算矩形线圈的入射场标势 W_{total} 及散射场标势 W'_{total} 为:

$$\begin{aligned} W_{\text{total}} &= \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 w \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} (2 - e^{-k(z-h)} - e^{k(z-h-\delta)}) \\ &\quad \cdot e^{j(ax+by)} P dadb \\ W'_{\text{total}} &= \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 w \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} \frac{e^{-kz}}{k^2} (e^{-kh} - e^{-k(h+\delta)}) \\ &\quad \cdot e^{j(ax+by)} P dadb \end{aligned} \quad (12)$$

则可得线圈的阻抗计算表达式为:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + \Delta Z = -\frac{1}{I} \left(\frac{d}{dt} \int_S \int_{\delta} \frac{\partial^2 W_{\text{total}}}{\partial z^2} dz_s dS \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \int_S B'_z \int_{\delta} \frac{\partial^2 W'_{\text{total}}}{\partial z^2} dz_s dS \right) \end{aligned} \quad (13)$$

式中, B_z 和 B'_z 为入射场和散射场的 z 分量.

将式(12)代入式(13),对一个矩形线圈的阻抗模型进行计算,由文献[11]中可得:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{j\omega\mu_0}{\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta + \frac{e^{-k\delta} - 1}{k}) P^2 dadb \\ \Delta Z &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} \cdot \\ &\quad \frac{e^{-k(h+\delta)} - e^{-kh}}{k} P^2 dadb \end{aligned} \quad (14)$$

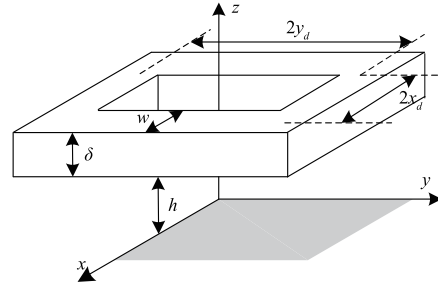


图3 在矩形线圈的中心建立坐标系

这里将利用参数 P 对矩形线圈的标势或阻抗进行建模的方法,称之为矩形描述法.

3 任意正交折线线圈的阻抗模型

3.1 顶点位形描述法

不失一般性,设存在任意形状的线形正交折线线圈,并随机选取原点建立直角坐标系 x - y .线圈以正向曲线 $ABCDE \cdots YZ$ 为边界,顶点坐标分别为: $(x_A, y_A), (x_B, y_B), \cdots, (x_Z, y_Z)$,如图4所示.

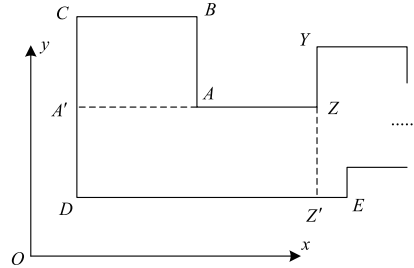


图4 任意线形正交折线线圈及其区域划分示意

根据平面面积的叠加原理,可以通过辅助点(如 A' 、 Z')将线圈划分为若干矩形之和,即:

$$S_{ABCDE \cdots YZ} = S_{ABCA'} + S_{ZA'DZ'} + \cdots \quad (15)$$

则对于任意矩形 $ABCA'$,其面积一定可由四个有向区间的叠加来表示:

$$\begin{aligned}
S_1: & 0 \leq y \leq k_{AB}(x - x_A) + y_A, x \in [x_A, x_B]; \\
S_2: & 0 \leq y \leq k_{BC}(x - x_B) + y_B, x \in [x_B, x_C]; \\
S_3: & 0 \leq y \leq k_{CA'}(x - x_C) + y_C, x \in [x_C, x_{A'}]; \\
S_4: & 0 \leq y \leq k_{A'A}(x - x_{A'}) + y_{A'}, x \in [x_{A'}, x_A].
\end{aligned} \quad (16)$$

式中, $k_{AB}, k_{BC}, k_{CA'}, k_{A'A}$ 分别代表四条边的斜率.

将上述四个区间范围代入式(6)中关于面积的积分项,可得:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{\text{rect}}} e^{-j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s = \iint_{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} e^{-j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s \\
& = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{A'A}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{AB}} \right) e^{-j(ax_A + by_A)} \\
& + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{AB}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{BC}} \right) e^{-j(ax_B + by_B)} \\
& + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{BC}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{CA'}} \right) e^{-j(ax_C + by_C)} \\
& + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{CA'}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{A'A}} \right) e^{-j(ax_{A'} + by_{A'})} \quad (17)
\end{aligned}$$

对于任意夹角 $\angle XYZ$, 定义其“角形因子”为:

$$Y_{\angle XYZ} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{XY}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{YZ}} \right) \quad (18)$$

对于顶点 Y , 定义其“位置因子”为:

$$\Psi_Y = e^{-j(ax_s + by_s)} \quad (19)$$

则利用式(18)中的角形因子 Y 和式(19)中的位置因子 Ψ , 可将式(17)简化为:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{\text{rect}}} e^{-j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s \\
& = Y_{\angle A'AB} \Psi_A + Y_{\angle ABC} \Psi_B + Y_{\angle BCA'} \Psi_C + Y_{\angle CA'A} \Psi_{A'} \\
& = \sum_{i=1}^4 Y_i \Psi_i \quad (20)
\end{aligned}$$

式中, Ψ_i 为矩形第 i 个顶点的位置因子, Y_i 为矩形第 i 个顶点的角形因子.

与式(10)类似, 可对上式进行线宽 w 的积分, 则有:

$$\begin{aligned}
& \int_w \iint_{S_{\text{rect}}} e^{-j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s dw_s = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sum_{i=1}^4 Y_i \Psi_i dw_s \\
& = \sum_{i=1}^4 Y_i \Psi_i \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} e^{-j\sqrt{2}(a \cos(\arg_i) + b \sin(\arg_i))w} dw_s \\
& = \sum_{i=1}^4 w \text{sinc}(\sqrt{2}w \frac{a \cos(\arg_i) + b \sin(\arg_i)}{2}) Y_i \Psi_i \\
& = \sum_{i=1}^4 T_i \Psi_i \quad (21)
\end{aligned}$$

式中, \arg_i 为第 i 个顶点的有向内角平分线的方向角, $T_i = w \text{sinc}(\sqrt{2}w \frac{a \cos(\arg_i) + b \sin(\arg_i)}{2}) Y_i$.

可以看出, T_i 与矩形第 i 个顶点的角形因子 Y_i 和线宽 w 有关, 本文称之为“形态因子”. 则对于矩形四个顶点来说, 则存在 4 种形态因子的取值:

$$T_i = \begin{cases} w \text{sinc}(w \frac{a+b}{2}) Y_i, & \arg_i = \frac{\pi}{4} \\ w \text{sinc}(w \frac{a-b}{2}) Y_i, & \arg_i = \frac{3\pi}{4} \\ w \text{sinc}(w \frac{-a-b}{2}) Y_i, & \arg_i = \frac{5\pi}{4} \\ w \text{sinc}(w \frac{-a+b}{2}) Y_i, & \arg_i = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \quad (22)$$

因此, 我们定义第 i 个顶点的 $K_i = T_i \Psi_i$, 即位置因子 Ψ_i 与形态因子 T_i 之积, 这里称 K_i 为顶点的“位形因子”. 则利用 K_i , 可将式(27)进一步简化为:

$$\int_w \iint_{S_{\text{rect}}} e^{-j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s dw_s = \sum_{i=1}^4 K_i = K_{\text{Rect}} \quad (23)$$

式中, K_{Rect} 为矩形线圈的位形因子, 其取值为 4 个顶点的位形因子之和.

将式(23)与式(10)进行对比可以看出, K_{Rect} 就相当于矩形描述法中的参数 P . 只是 P 由矩形线圈的长宽参数 y_d 和 x_d 决定, 而 K_{Rect} 则由 4 个顶点的位形因子描述. 由式(19)中可以看出, K_{Rect} 中含有复指数项, 因此有:

$$\|K_{\text{Rect}}\|^2 = K_{\text{Rect}} \cdot \bar{K}_{\text{Rect}} \quad (24)$$

式中, \bar{K}_{Rect} 表示为 K_{Rect} 的复共轭, 即有:

$$\bar{K}_{\text{Rect}} = \sum_{i=1}^4 \bar{K}_i = \sum_{i=1}^4 T_i \bar{\Psi}_i = \int_w \iint_{S_{\text{rect}}} e^{j(ax_s + by_s)} dx_s dy_s dw_s$$

则可利用矩形线圈的位形因子 K_{Rect} 对矩形线圈的阻抗进行表达:

$$\begin{aligned}
Z_0 & = \frac{j\omega\mu_0}{\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta + \frac{e^{-k\delta} - 1}{k} \right) K_{\text{Rect}} \bar{K}_{\text{Rect}} dadb \\
\Delta Z & = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} \cdot \\
& \quad \frac{e^{-k(h+\delta)} - e^{-kh}}{k} K_{\text{Rect}} \bar{K}_{\text{Rect}} dadb \quad (25)
\end{aligned}$$

由上述推导过程可以看出, 位置因子 Ψ 仅与顶点坐标有关, 而形态因子 T 仅与两条邻边的斜率及线宽有关. 这里将利用矩形 4 个顶点的位形因子 K_i 进行其阻抗分析的方法, 称之为顶点位形描述法.

3.2 阻抗模型

在本节中, 我们尝试将该结论推广到任意正交折线圈的情况. 首先, 我们将证明与角形因子 Y 相关的 2 个重要性质.

性质 1: 角形因子 Y 满足叠加性; 即对于同一顶点 A 的任意两个夹角 $\angle WYX$ 和 $\angle XYZ$, 若有 $\angle WYX + \angle XYZ = \angle WYZ$, 则有 $Y_{\angle WYX} + Y_{\angle XYZ} = Y_{\angle WYZ}$.

证明: 根据角形因子 Y 的定义(18), 可得下式:

$$Y_{\angle WYX} + Y_{\angle XYZ} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a + b \cdot k_{WY}} - \frac{1}{a + b \cdot k_{YX}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a+b \cdot k_{XY}} - \frac{1}{a+b \cdot k_{YZ}} \right) \\
& = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a+b \cdot k_{WY}} - \frac{1}{a+b \cdot k_{YZ}} \right) = Y_{\angle WYZ}
\end{aligned} \quad (26)$$

性质 1 得证.

性质 2 平角的角形因子 Y 恒为零; 即若任意夹角 $\angle XYZ$ 为平角 (180°), 则有 $Y_{\angle XYZ} = 0$ 成立.

证明 根据角形因子 Y 的定义 (18), 可得下式:

$$\begin{aligned}
Y_{\angle XYZ} &= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a+b \cdot k_{XY}} - \frac{1}{a+b \cdot k_{YX}} \right) \\
&= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a+b \cdot k_{XY}} - \frac{1}{a+b \cdot k_{XY}} \right) = 0
\end{aligned} \quad (27)$$

性质 2 得证.

那么, 对于图 4 中所示任意正交折线线圈, 明显可将其面积等效为若干矩形面积之叠加, 即有:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{ABCDZ}} e^{-j(ax+by)} dx dy \\
&= \iint_{S_{ABCA'}} e^{-j(ax+by)} dx dy + \iint_{S_{ZAVD}} e^{-j(ax+by)} dx dy + \dots \\
&= Y_{\angle A'AB} \Psi_A + Y_{\angle ABC} \Psi_B + Y_{\angle BCA'} \Psi_C + Y_{\angle CA'A} \Psi_{A'} + \dots
\end{aligned} \quad (28)$$

利用性质 1 和性质 2, 可对辅助顶点 A' 相关的位置因子及角形因子项进行合并处理, 则有:

$$\begin{aligned}
Y_{\angle CA'A} \Psi_{A'} + Y_{\angle AA'D} \Psi_{A'} &= (Y_{\angle CA'A} \Psi_{A'} + Y_{\angle AA'D} \Psi_{A'}) \Psi_{A'} \\
&= Y_{\angle CA'D} \Psi_{A'} = 0
\end{aligned} \quad (29)$$

则根据式 (29), 可对式 (28) 进行化简:

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_{ABCDZ}} e^{-j(ax+by)} dx dy \\
&= \iint_{S_{ABCA'}} e^{-j(ax+by)} dx dy + \iint_{S_{ZAVD}} e^{-j(ax+by)} dx dy \\
&= Y_{\angle A'AB} \Psi_A + Y_{\angle ABC} \Psi_B + Y_{\angle BCA'} \Psi_C \\
&\quad + Y_{\angle Z'ZA'} \Psi_Z + Y_{\angle A'DZ'} \Psi_D + Y_{\angle DZ'Z} \Psi_{Z'}
\end{aligned} \quad (30)$$

由上式可以看出, 两个线形矩形线圈 $S_{ABCA'}$ 和 S_{ZAVD} 合并为复杂折线线圈 S_{ABCDZ} 后, 依然可由折线线圈各顶点角位置因子 Ψ 及角形因子 Y 进行描述. 不失一般性, 根据性质 1, 任何辅助顶点 (如 A') 均会在合并过程还原为平角. 而根据性质 2, 则任何辅助顶点的角形因子 Y 恒为 0. 由此, 可得到一个重要结论: 在利用顶点位形描述法来表达正交折线线圈时, 所有的辅助顶点均可忽略!

上述结论可以不加修改地扩展到任意线形正交折线线圈的情况, 则有:

$$\iint_{S_{ABCDZ}} e^{-j(ax+by)} dx dy = \sum_{i=1}^N Y_i \Psi_i \quad (31)$$

式中, N 为线形正交折线线圈实际顶点的个数.

同理, 可将式 (23) 中所示矩形线圈的位形因子 K_{Rect} , 扩展到任意正交折线线圈的情况:

$$K_S = \sum_{i=1}^N T_i \Psi_i = \sum_{i=1}^N K_i \quad (32)$$

式中, K_S 表示任意正交折线线圈的位形因子, 其取值为 N 个顶点的位形因子 K_i 之和. 当 $N=4$ 时, K_S 即退化为矩形线圈的位形因子 K_{Rect} .

无需再重复 3.1 节中的分析推导过程, 直接可由式 (25) 扩展为任意正交折线线圈的阻抗模型:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \frac{j\omega\mu_0}{\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta + \frac{e^{-k\delta} - 1}{k} \right) K_S \cdot \bar{K}_S da db \\
\Delta Z &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} \cdot \frac{e^{-k(h+\delta)} - e^{-kh}}{k} K_S \cdot \bar{K}_S da db
\end{aligned} \quad (33)$$

式中, \bar{K}_S 表示为 K_S 的复共轭.

对于复杂的折线线圈, 矩形描述法需要将线圈拆解为一系列矩形线圈并分别描述. 而本文所提顶点位形描述法与线圈的复杂程度无关, 只需要根据所有顶点的坐标和夹角形态即可直接列出二重积分形式的阻抗表达式.

4 算例与讨论

以回折形折线线圈为例, 对比两种方法分别计算其入射场阻抗 (自感阻抗) 的具体过程. 设待分析线圈线宽 $w=0.25\text{mm}$, 厚度 $w=0.035\text{mm}$, 其线圈的外形及尺寸如图 5 中所示.

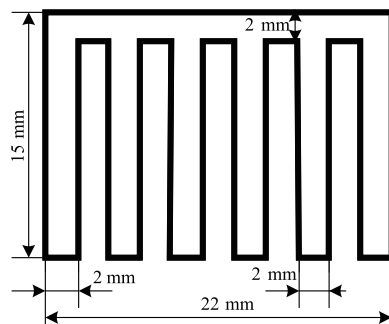


图5 待分析回折形折线线圈的外形及尺寸

利用文献 [14] 中的方法, 可将线圈拆解为 7 个小矩形线圈的叠加, 拆解结果如图 6(a) 所示.

以该线圈左下角为原点建立直角坐标系. 第 i 个 ($i=1, 2, \dots, 7$) 矩形线圈的中心坐标 (x_{0i}, y_{0i}) 及线圈的长宽参数 x_{di}, y_{di} 如图 6(a) 中所示. 则根据式 (14), 可计算 7 个矩形线圈各自的自感阻抗为:

$$Z_0(i) = \frac{j16\omega\mu_0}{\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta + \frac{e^{-k\delta} - 1}{k} \left(\frac{P_i}{ab} \right)^2 da db.$$

同理, 7 个矩形线圈相互之间的互感阻抗为:

$$Z_0(i, j) = \frac{j16\omega\mu_0}{\pi^2 w^2 \delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta + \frac{e^{-k\delta} - 1}{k} \right)$$

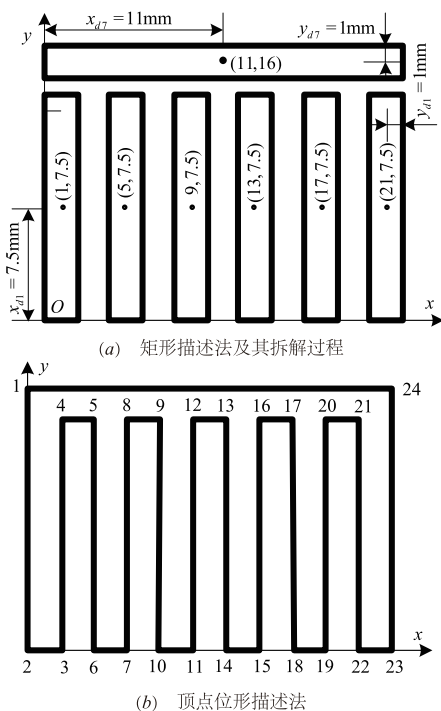


图6 两种模型描述方法的建模过程对比

$$\cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^2 P_i P_j e^{-j(a\Delta x_{i,j} + b\Delta y_{i,j})} da db, i \neq j,$$

式中, $\Delta x_{i,j}, \Delta y_{i,j}$ 表示矩形线圈 i 和矩形线圈 j 中心之间的位移量.

将 7 个矩形线圈的实际坐标代入上两式, 分别计算 7 个自感阻抗 $Z_0(i)$, 42 个互感阻抗 $Z_0(i, j)$, 并用公式 $Z_0 = \sum_{i=1}^7 Z_0(i) + \sum_{i=1}^7 \sum_{i=1, i \neq j}^7 Z_0(i, j)$ 进行叠加. 经数学软件 mathematica10.4 计算, 得到该回折形折线线圈的总电感为 $0.1436 \mu\text{H}$, 其在 10kHz 下的自感阻抗为 0.00902Ω .

再用本文所提的顶点位形描述法对上述回折形折线线圈进行阻抗建模. 图 6(b) 中给出了所有顶点的编号结果, 共 24 个顶点. 很明显, 内角平分线 $\arg_i = \pi/4$ 的顶点有: 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22; $\arg_i = 3\pi/4$ 的顶点有: 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23; $\arg_i = 5\pi/4$ 的顶点有: 24; 最后, $\arg_i = 7\pi/4$ 的顶点有: 1.

根据上述信息, 由式(22)可选择顶点 i 的形态因子 T_i . 再根据式(32), 由 24 个顶点坐标 (x_i, y_i) 可直接列出线圈位形因子 K_Σ 及其复共轭 \bar{K}_Σ 的表达式:

$$K_\Sigma = \sum_{i=1}^{24} T_i \Psi_i, \bar{K}_\Sigma = \sum_{i=1}^{24} T_i \bar{\Psi}_i.$$

将 K_Σ 和 \bar{K}_Σ 代入式(33)并利用 mathematica 10.4 进行计算. 得到该线圈电感为 $0.1436 \mu\text{H}$, 在 10kHz 激励频率下阻抗 Z_0 为 0.00902Ω . 很明显, 两种方法对该算例的计算结果完全相同.

5 实验验证

该实验所用直角螺线形折线线圈外形如图 7(a) 中所示. 经实际测量(保留 3 位有效数字), 其几何参数如表 1 中所示.

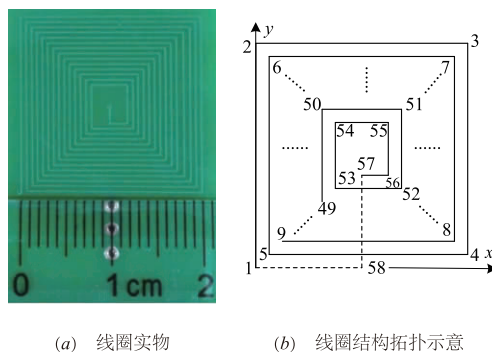


图7 实验用直角螺线形折线线圈及其拓扑

表 1 直角螺线形折线线圈外形参数 (mm)

线圈外长	线圈外宽	线宽	厚度	匝间距	匝数
20.0	20.0	0.20	0.035	0.582	14

该线圈闭合回路形成的结构拓扑图如图 7(b) 中所示. 拓扑图增加的两条虚线代表实际客观存在的线圈外部引线. 对线圈所有顶点进行编号, 顶点的编号结果已在图 7(b) 中标出, 共 58 个顶点.

从图 7(b) 中拓扑图中不难看出, 内角平分线 $\arg_i = \pi/4$ 的顶点有: 1, 5, 9, ..., 49, 53; $\arg_i = 3\pi/4$ 的顶点有: 4, 8, 12, ..., 52, 56, 57, 58; $\arg_i = 5\pi/4$ 的顶点有: 3, 7, 11, ..., 51, 55; 最后, $\arg_i = 7\pi/4$ 的顶点有: 2, 6, 10, ..., 50, 54. 同样使用前面实验介绍的计算过程, 可得该线圈的自感为 $2.7687 \mu\text{H}$.

在物理实验中, 使用 IM3523LCR 测量仪对线圈的感抗直接进行测量. 将被测线圈置塑料板上方, 同时设置 LCR 测量仪测试频率从 40Hz 到 200kHz 变化, 测量线圈的自感 L_0 和入射场阻抗(自感阻抗) X_0 . 实验测得该直角螺线形线圈 X_0 及 L_0 随频率 f 变化结果分别如图 8 中曲线 1 和 2 所示.

从图 8 中可以看出, 线圈的入射场阻抗 X_0 随频率变化呈较好的线性关系, 而自感量 L_0 在 $1\text{kHz} \sim 200\text{kHz}$ 频率范围内基本保持不变. 当激励频率小于 1kHz 时, 线圈自感测量值出现了一定的偏离. 这主要是因为待测线圈的自感 L_0 很小, 在低频时的阻抗 X_0 (如 100Hz 时仅为 0.00164Ω) 超出了 IM3523LCR 测量仪量程. 因此, 本实验线圈自感 L_0 的测量值取 $1\text{kHz} \sim 200\text{kHz}$ 范围内的平均值, 即为 $2.757 \mu\text{H}$. 与模型值 $2.7687 \mu\text{H}$ 对比, 误差为 0.42% .

如图 9 所示, 再将待测线圈平行置于铝板上方, 进行涡流影响阻抗的变化实验. 在线圈与铝板表面之间

铺设提高薄片以改变线圈的提离值 h . 考虑到 PCB 线圈表面的防护漆及铝板表面的不平顺, 会形成一个固有提离, 约 0.4mm 左右. 则线圈实际提离值 h 为提高薄片厚度 + 固有提离.

首先, 固定该线圈的激励频率 f 分别为 20kHz、50kHz

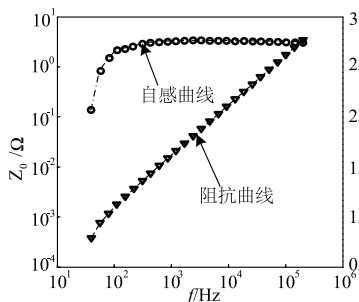


图8 直角螺线形线圈阻抗及自感随频率变化结果

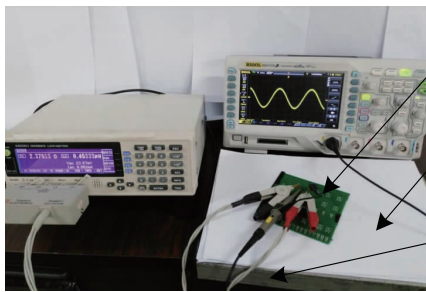


图9 在铝板上进行涡流影响阻抗的变化实验

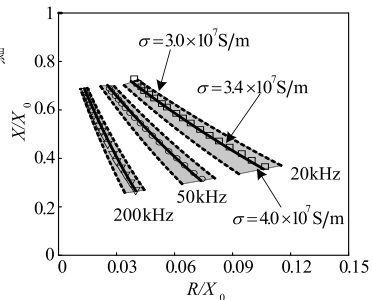


图10 导体电导率引起的阻抗变化范围及其标定

查阅资料得铝材的电导率一般在 $3.0 \times 10^7 \sim 4.0 \times 10^7 \text{ S/m}$ 的范围内. 将实验参数及铝材电导率的取值范围代入本文模型, 可确定上述三组频率下阻抗的变化范围, 如图 10 中虚线所包含的阴影部分所示. 根据系统参数的标定原理, 对实验铝板的电导率 σ 进行标定. 当电导率 σ 取 $3.4 \times 10^7 \text{ S/m}$ 时, 测量值与模型值吻合效果较好, 结果如图 10 中的黑实线所示.

再固定线圈的实际提离值 h 分别为 0.5mm、1.0mm 和 1.9mm, 调整线圈的激励频率 f 从 1kHz 到 200kHz 变化, 得到该回折线圈的涡流阻抗随激励频率 f 的变化规律. 再利用本文模型式 (33) 计算相同条件下线圈阻抗

和 200kHz, 再通过变换提高薄片使线圈的实际提离值 h 从 0.4mm 到 1.9mm 变化, 并记录 LCR 测量仪实测阻抗 Z 随线圈提离值 h 的变化数据. 利用线圈的入射场阻抗 X_0 对实测阻抗 $Z = R + jX$ 进行归一化, 并在阻抗平面图上绘制相关变化数据的点阵, 结果如图 10 中所示.

模型值. 图 11 为测量值与模型值随频率变化的结果, 其中点阵为测量值.

从图 11 中不难看出, 所提模型的计算结果与测量值之间总体吻合良好, 模型能有效反映频率、提离等参数对线圈阻抗影响的变化趋势. 虽然, 在频率 150kHz ~ 200kHz 范围内, 测量值与模型值的实部 R 存在一定系统误差, 分析主要原因应该是测量频率已接近 IM3523LCR 测量仪的上限量程所造成的. 但测量值与模型值最大偏差也不超过 0.01Ω , 接近该 LCR 测量仪的有效精度. 因此, 本文中利用顶点位置描述的折线线圈阻抗建模方法有效.

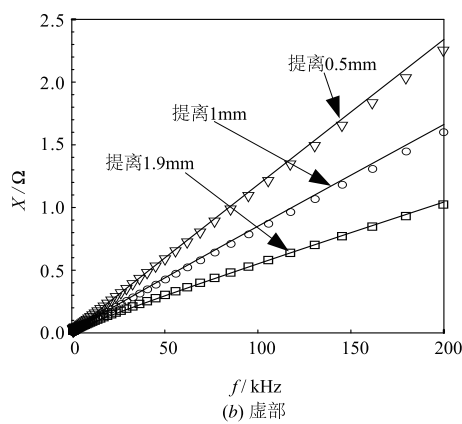
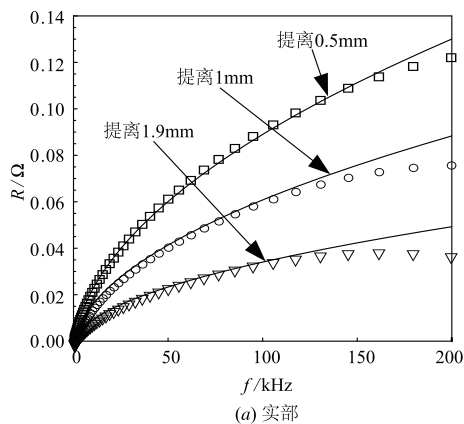


图11 阻抗测量值与模型值对比

6 结论

(1) 新方法中利用了一种新的顶点位形描述来实现阻抗建模, 通过一个模型就可以对矩形、回折形、直角螺线形等多种折线线圈进行阻抗描述, 实现了上述线圈模型的统一.

(2) 新方法利用顶点的位置因子 Ψ 和形态因子 T

对折线线圈进行描述, 从而解决了现有阻抗建模方法中必须将坐标原点置于矩形线圈中心的约束.

(3) 对于任意复杂的折线线圈, 新方法无需再对线圈结构进行拆解, 也无需再对线圈基本单元进行坐标变换或平移, 只需要根据线圈所有顶角位形信息, 就可直接地列出其阻抗的封闭形式表达式.

(4) 新方法是对折线线圈特性更为一般性的描述

方法,现有的矩形描述法是新方法在特殊坐标选择下的一个特例.新方法在简化建模过程和提高建模速度方面,相对于已有方法具有非常明显优势.

参考文献

- [1] Weise K, Ziolkowski M, Carlstedt M, et al. Oscillatory motion of permanent magnets above a conducting slab [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(10): 1-14.
- [2] Ashigwike E C, Ushie O J, Mackay R, et al. A study of the transduction mechanisms of electromagnetic acoustic transducers (EMATs) on pipe steel materials [J]. Sensors & Actuators A Physical, 2015, 229: 154-165.
- [3] Lv C, Liu W, Jiang Y, et al. Analytical modelling for edge effects and impedance characteristics of the transverse eddy current displacement sensors with rectangular coils [J]. International Journal of Applied Electromagnetics & Mechanics, 2014, 46(4): 823-834.
- [4] Bauernfeind T, Preis K, Renhart W, et al. Finite element simulation of impedance measurement effects of NFC antennas [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51(3): 1-4.
- [5] 周廉, 朱善安, 贺斌. 三维磁感应磁声成像的新算法研究 [J]. 电子学报, 2013, 41(2): 288-294.
Zhou Lian, Zhu Shan'an, He Bin. A three-dimensional bio-impedance imaging algorithm by means of magnetoacoustic tomography with magnetic induction [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(2): 288-294. (in Chinese)
- [6] 董辉, 朱义胜, 赵柏山. 基于小波矩量法的平面螺旋电感的电磁辐射研究 [J]. 电子学报, 2009, 37(3): 535-539.
Dong Hui, Zhu Yisheng, Zhao Baishan. Study on the electromagnetic radiation of planar spiral inductors based on wavelet-mom [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(3): 535-539. (in Chinese)
- [7] 李学平, 杨媛, 高勇, 等. 基于生物电容的视觉假体无线能量传输系统建模及效率优化 [J]. 电子学报, 2015, 43(1): 104-110.
Li Xueping, Yang Yuan, Gao Yong, et al. Visual prosthesis wireless power transfer system modeling based on biological capacitance and its efficiency-optimization [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(1): 104-110. (in Chinese)
- [8] 陈兴乐, 雷银照. 导电磁管道外任意放置线圈激励下脉冲涡流场时域解析解 [J]. 物理学报, 2014, 63(24): 16-25.
Chen Xingle, Lei Yinzhaohao. Analytical solutions to pulsed eddy current field excited by a differently oriented probe coil outside a conducting ferromagnetic pipe [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(24): 16-25. (in Chinese)
- [9] Itaya T, Ishida K, Tanaka A, et al. Analysis of an eddy current speed meter by rectangular coil system [J]. IEEE Transactions on Fundamentals & Materials, 2013, 133(8):

416-423.

- [10] Itaya T, Ishida K, Tanaka A, et al. Analysis of a fork-shaped rectangular coil facing moving sheet conductors [J]. IET Science Measurement Technology, 2009, 3(4): 279-285.
- [11] Theodoulidis T P, Kriezis E E. Impedance evaluation of rectangular coils for eddy current testing of planar media [J]. NDT & E International, 2002, 35(6): 407-414.
- [12] Fava J O, Ruch M C. Calculation and simulation of impedance diagrams of planar rectangular spiral coils for eddy current testing [J]. NDT & E International, 2006, 39(5): 414-424.
- [13] Cheng Y H, Shu Y M. A new analytical calculation of the mutual inductance of the coaxial spiral rectangular coils [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2014, 50(4): 1-6.
- [14] 郝宽胜, 黄松岭, 赵伟, 等. 基于二阶矢量位的矩形截面回折线圈阻抗和脉冲磁场的解析建模与计算 [J]. 物理学报, 2011, 60(7): 784-793.
Hao Kuansheng, Huang Songling, Zhao Wei, et al. Analytical modelling and calculation of impedance and pulsed magnetic field for rectangular meander coil based on second order potential [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(7): 784-793. (in Chinese)

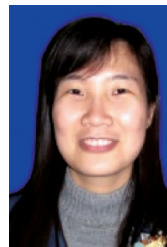
作者简介



吴德会 男, 1975 年生, 2006 年于合肥工业大学获得博士学位, 现为厦门大学机电系副教授, 博士生导师, 主要研究方向为无损检测、传感器技术和智能测控技术等。
E-mail: wudehui@xmu.edu.cn



何天府 男, 1990 年生, 现就读厦门大学航空航天学院, 研究方向为电磁无损检测技术。
E-mail: 1411939025@qq.com



王晓红 (通信作者) 女, 1976 年生, 2009 年于大连理工大学获得硕士学位, 现为厦门大学机电系高工, 主要研究方向为传感器技术。
E-mail: wxh@xmu.edu.cn